

آزمون های مبتنی بر توزیع کای دو

آزمون اختلاف نسبت در دو گروه وابسته (مک-نمار)

- آزمون مک نمار یک آزمون ناپارامتری است که اغلب در مورد داده های اسمی دو مقوله ای یا دویاسخی مربوط به دو نمونه ی مرتبط یا همبسته به کار می رود. این آزمون به ویژه در مواردی به کار می رود که می خواهیم نظرهای یا عملکردهای قبلی یا بعدی موردها (معمولا افراد) را با هم مقایسه کنیم. برای نمونه می توان به بررسی نظرات افراد در مورد مشارکت در انتخابات ریاست جمهوری پیش از سخنرانی در آن مورد و پس از سخنرانی، اشاره نمود. پس اجرای آزمون مک نمار مستلزم وجود دو مجموعه از داده های دو مقوله ای است. این داده ها می توانند به طور ذاتی دو مقوله ای باشند نظیر «بلی یا خیر» و یا به صورت طبقه ای، رتبه ای یا فاصله ای باشند که پژوهشگر آن ها را به صورت دو مقوله ای کدبندی می کند.

نمود دیداری جدول 2#2 برای آزمون مک نمار

داده های سنجش اول \ داده های سنجش دوم	مقوله 1	مقوله 2
	مقوله 1	مقوله 2
مقوله 1	A	b
مقوله 2	C	d

آزمون مک نمار به افرادی که تغییر عقیده یا عملکرد نداده اند، یعنی مقادیر a و d اهمیت نمی دهد و تنها با مقادیری سروکار دارد که با تغییر عقیده مربوط می شوند یعنی b و c. منطق اصلی انجام این آزمون این است که اگر تدبیر یا عامل مورد نظر که پس از سنجش اول اعمال می شود مؤثر نباشد، می بایست یا در عقیده ها و عملکردها تغییری صورت نگیرد و یا تغییر در میان آزمودنی ها به سوی یکی از طرف ها (مثبت یا منفی، مخالف یا موافق و...) برابر با طرف دیگر باشد. بنابراین فرضیه پژوهش در این آزمون بیان می دارد که بین دو دسته از داده ها تفاوت معناداری ایجاد می شود. آماره ی آزمون مک نمار به صورت زیر تعریف می شود و در صورت درست بودن فرض صفر دارای توزیع کای دو با یک درجه آزادی است:

$$\chi^2 = \frac{(|b - c| - 1)^2}{b + c}$$

آزمون مک نمار

- در یک مطالعه در رابطه با اجباری بودن و یا نبودن ورزش صبحگاهی در مدارس نظرسنجی از دانش آموزان انجام شده، موافقت و یا عدم موافقت آنان پس از یک برنامه آموزشی مطابق جدول زیر می باشد، الف) از چه آزمونی برای بررسی اثر برنامه آموزشی استفاده می کنید؟ (دو دلیل) ج) آیا فرض اثر بخشی برنامه آموزشی پذیرفته می شود؟

قبل	بعد	موافق	مخالف	جمع
موافق	35	50	85	
مخالف	60	20	80	
جمع	95	70	165	

$$\bullet \chi^2 = \frac{(|50-60|-1)^2}{50+60} = 0.736$$

- در مقایسه با عدد بحرانی به دست آمده از جدول توزیع کای دو با یک درجه آزادی با اطمینان 95 درصد 3.84 اثر پذیری برنامه آموزشی رد می شود. مقدار معنی داری با استفاده از توزیع کای دو نیز 0.391 به دست می آید.

آدرس سایت اینترنتی

- <https://www2.ccrb.cuhk.edu.hk/stat/confidence%20interval/McNemar%20Test.htm>



C.I. Calculator: McNemar's Chi-Square Test

Data Input: ([Help](#)) ([Formula](#)) ([Examples](#))

	Test 2 Positive	Test 2 Negative	Totals
Test 1 Positive	35	50	85
Test 1 Negative	60	20	80
Totals	95	70	165
Reset	Calculate		

Result:

Result	Test Statistic	p-value (1 tail)	p-value (2 tails)
McNemar's Test	0.73636	0.19541	0.39083
Odds Ratio	0.83333		

آماره آزمون

سطح معنی داری

Dr M.Rahimzadeh

آزمون نیکویی برآزش (کای دو - یک نمونه ای)

در بسیاری از تحقیقات، محقق علاقه‌مند به شمارش افراد، اشیا و یا پاسخ‌هایی است که در طبقه‌های خاصی قرار می‌گیرند. مثلاً تعدادی از بیماران را می‌توان بر حسب گروه خونی به 4 دسته A ، O ، B و AB طبقه بندی کرد. یا مثلاً ممکن است افراد مختلف را بر حسب این که آیا "موافق" ، "بی تفاوت" و یا "مخالف" کار بیرون از منزل زنان هستند، دسته بندی کرد. در این حال محقق می تواند این فرضیه را که پاسخ های ذکر شده از نظر فراوانی با یکدیگر تفاوت معنی داری خواهند داشت، آزمون کند. در این آزمون باید تعداد طبقه‌ها 3 یا بیشتر باشد. این آزمون از جمله آموهای تطابق توزیع است.

نکته: در حالتی که تنها دو طبقه وجود دارد، آزمون دو جمله‌ای (مقایسه نسبت‌ها) با مقدار 0.5 معادل این آزمون است.

این آزمون نسبت به حجم نمونه حساس است و هر چه حجم نمونه بیشتر باشد، توان آزمون بیشتر است. بنابراین حجم نمونه باید از 50 بیشتر باشد.

آزمون نیکویی برآزش (کای دو- یک نمونه ای)

- فرضیه ها: در این آزمون فرضیه ها به صورت زیر مطرح هستند: H_0 :
- تفاوتی بین فراوانی طبقه ها وجود ندارد.
 - حداقل دو طبقه از نظر فراوانی متفاوت اند.
- H_1 :

$$\chi^2_{df} = \frac{\sum_{i=1}^k (O_i - E_i)^2}{E_i}, df = k - 1 \quad \text{آماره آزمون کای دو به این صورت است:}$$

- که در آن دو نوع فراوانی مد نظر قرار گرفته و با یکدیگر مقایسه می شود.
- هرچه مقادیر مشاهده شده دور از انتظار باشند، مقدار این آماره بزرگ و در نتیجه فرض صفر به مخاطره می افتد و بر عکس تفاوت کمتر بین مقادیر مشاهده شده و مقادیر مورد انتظار، آماره این آزمون را کوچک کرده و فرض صفر را نمی توان رد کرد.

آزمون نیکویی برآزش (کای دو- یک نمونه ای)

یکسان بودن افراد در چهار گروه خونی مختلف موضوع مورد بررسی يك محقق است. او 100 نفر را انتخاب و گروه‌های خونی آنان را در جدول زیر ثبت کرده است.

گروه خونی	A	AB	B	O	جمع
	23	38	21	18	100

سوال این است که آیا تعداد افراد با گروه خونی مختلف در این جمعیت مساوی است؟ فرضیه های آزمون به صورت زیر است:

$$\begin{cases} H_0 : \text{تفاوتی بین فراوانی گروه‌های خونی وجود ندارد.} \\ H_1 : \text{حداقل دو گروه خونی از نظر فراوانی متفاوت‌اند} \end{cases}$$

مثال: اگر قرار باشد گروه‌های خونی در این جمعیت به به طور یکسان توزیع شده باشند باید در بین 100 نفر در هر گروه خونی 25 نفر قرار گیرند که مقدار مورد انتظار در هر گروه خونی است.

گروه خونی	A	O	B	AB
مقادیر مشاهده شده O_i	۲۳	۳۸	۲۱	۱۸
مقادیر مورد انتظار E_i	۲۵	۲۵	۲۵	۲۵
مقادیر آماره $\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$	$\frac{(۲۳ - ۲۵)^2}{۲۵} = ۰/۱۶$	$\frac{(۳۸ - ۲۵)^2}{۲۵} = ۶/۷۶$	$\frac{(۲۱ - ۲۵)^2}{۲۵} = ۰/۶۴$	$\frac{(۱۸ - ۲۵)^2}{۲۵} = ۱/۹۶$

$$\chi^2_{df} = \frac{\sum_{i=1}^k (O_i - E_i)^2}{E_i} = 1.96 + 0.64 + 6.76 + .16 = 9.52$$

مقدار کای‌دو در جدول با 3 درجه آزادی و سطح معنی داری 5% برابر 7/82 است. بنابراین فرض صفر رد می‌شود. یعنی توزیع گروه‌های خونی در این جمعیت یکسان نمی‌باشد.

تمرین: یکسان بودن تعداد طرفداران در مبارزات انتخابی مختلف موضوع مورد بررسی يك محقق است. او 60 نفر را انتخاب و تعداد طرفداران هر گروه را در جدول زیر ثبت کرده است.

گروه	اصولگرا	اصلاح طلب	مستقل	جمع
تعداد	25	20	15	60

گروه	اصول گرا	اصلاح طلب	مستقل
مقادیر مشاهده شده O_i	۲۵	۲۰	۱۵
مقادیر مورد انتظار E_i	۲۰	۲۰	۲۰
مقادیر آماره $\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$	$\frac{(25 - 20)^2}{20} = 1.25$	$\frac{(20 - 20)^2}{20} = 0$	$\frac{(15 - 20)^2}{20} = 1.25$

$$\chi^2_{df} = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 1.2 + 0 + 1.25 = 2.5$$

مقدار کای دو در جدول با 2 درجه آزادی و سطح معنی داری 5% برابر 5.99 است. بنابراین فرض صفر رد نمی شود. یعنی درصد طرفداران گروه های مختلف در این جمعیت یکسان می باشد.

آزمون کای دو (استقلال دو پيشامد کيفی)

فرضیه ها: در این آزمون فرضیه ها به صورت زیر مطرح هستند:

- دو متغیر اسمی از هم مستقل هستند.
 - دو متغیر اسمی از هم مستقل نیستند.
- $$\begin{cases} H_0 : \\ H_a : \end{cases}$$

آزمون استقلال کای دو (سنجش رابطه بین دو متغیر)

- رابطه سیگار کشیدن و جنسیت: یک نمونه تصادفی به حجم 2050

جنسیت سیگار کشیدن			
	مرد	زن	
بله	145	35	180
خیر	935	935	1870
	1080	970	2050

- پیش فرض ها:
- 1- فراوانی مورد انتظار در هیچ طبقه ای نباید صفر باشد.
- 2- درصد فراوانی طبقاتی که فراوانی آنها کمتر از 5 است، نباید بیشتر از 25% فراوانی کل باشد.
- در صورت مخدوش بودن این فرض آزمون جایگزین آزمون دقیق فیشر است.
- سوال:
- آیا جنسیت و سیگار کشیدن از هم مستقل هستند؟ (دو پیش آمد A و B را مستقل می گویند هرگاه رخداد یا عدم رخداد پیش آمد A تأثیری در رخداد یا عدم رخداد پیش آمد B نداشته باشد).

آزمون کای دو

سیگار کشیدن	مرد	زن	
بله	145 (95)	35 (85)	180
خیر	935(985)	935(885)	1870
	1080	970	2050

$$Q_{H.} = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^k \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

- آماره آزمون کای دو
- هر قدر که تفاوت مقادیر مشاهده شده و مورد انتظار متفاوت باشد، مقدار آماره افزایش می یابد در نتیجه فرض استقلال بیشتر مورد تردید قرار می گیرد به عبارت دیگر بین جنسیت و سیگار کشیدن از نظر آماری رابطه معنی داری وجود دارد.
- مقدار به دست آمده از آماره اگر از مقدار عددی توزیع کای دو با بزرگتر باشد فرض صفر رد می شود.

$$RH. \Leftrightarrow Q_{H.} > \chi^2_{(1-\alpha, (k-1)(l-1))}$$

- A پیشامد سیگاری بودن
- B = پیشامد مرد بودن
- $A \cap B$ = پیشامد مرد سیگاری
- تحت فرض استقلال

$$n(A) = 180 \quad n(B) = 1080$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow n(A \cap B) = \frac{n(A)n(B)}{n}$$

$$n(A \cap B) = \frac{180 \times 1080}{2050} = 95$$

$$n(A' \cap B) = \frac{1870 \times 1080}{2050} = 985$$

$$n(A \cap B') = \frac{180 \times 970}{2050} = 85 \quad n(A' \cap B') = \frac{970 \times 1870}{2050} = 885$$

تمرین: به منظور بررسی اثر تسکین دهنده یک نوع قرص مسکن بر جنسیت، 45 زن و 45 مرد را به تصادف انتخاب و نتیجه را در جدول زیر آورده ایم. در سطح معنی داری 5 درصد، آزمون کنید آیا تاثیر این قرص در دو جنس یکسان است؟

جنسیت	اثر قرص			جمع
	بی اثر	کم اثر	موثر	
زن	13	15	17	45
مرد	11	14	20	45
جمع	24	29	37	90

$$Q_{Ho} = \frac{(13 - 12)^2}{12} + \frac{(11 - 12)^2}{12} + \frac{(15 - 14.5)^2}{14.5} + \frac{(14 - 14.5)^2}{14.5} + \frac{(17 - 18.5)^2}{18.5} + \frac{(20 - 18.5)^2}{18.5} = 0.167 + 0.0345 + 0.243 = 0.444$$

$$\chi^2_{(1,0.05)} = 3.84$$

جنسیت	اثر قرص			جمع
	بی اثر	کم اثر	موثر	
زن	13(12)	15(14.5)	1(18.5) 7	45
مرد	11(12)	14(14.5)	2(18.5) 0	45
جمع	24	29	37	90

چون آماره آزمون (0.444) از عدد بحرانی به دست آمده از جدول کوچمتر است پس فرض برابری تاثیر مسکن در دو جنس را می پذیریم.

جدول کاي دو

نحوه استفاده از جدول

در ستون اول درجه آزادي از 1 تا 100 آمده است.

در سطر اول بالاي جدول مقادير معني داري (آلفا) از 0/1 تا 0/001 آمده است.

به عنوان مثال :

مقدار χ^2 با 10 درجه آزادي و سطح معني داري 0/05 برابر است با

$$\chi^2_{(10, 0.05)} = 18.31$$

جدول توزيع کي دو

درجه آزادي	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
1	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.83
2	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	13.82
3	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	16.27
4	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	18.47
5	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	20.51
6	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46
7	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32
8	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95	26.12
9	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88
10	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59
11	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76	31.26
12	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91
13	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53
14	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12
15	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70
16	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25
17	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79
18	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31
19	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82
20	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.31
21	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80
22	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27
23	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73
24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18
25	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62
26	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05
27	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65	55.48
28	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89
29	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30
30	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70
32	42.58	46.19	49.48	53.49	56.33	62.49
34	44.90	48.60	51.97	56.06	58.96	65.25
36	47.21	51.00	54.44	58.62	61.58	67.98
38	49.51	53.38	56.90	61.16	64.18	70.70
40	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40
42	54.09	58.12	61.78	66.21	69.34	76.08
44	56.37	60.48	64.20	68.71	71.89	78.75
46	58.64	62.83	66.62	71.20	74.44	81.40
48	60.91	65.17	69.02	73.68	76.97	84.04
50	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66
55	68.80	73.31	77.38	82.29	85.75	93.17
60	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95	99.61
65	79.97	84.82	89.18	94.42	98.10	105.99
70	85.53	90.53	95.02	100.43	104.21	112.32
75	91.06	96.22	100.84	106.39	110.29	118.60
80	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32	124.84
85	102.08	107.52	112.39	118.24	122.32	131.04
90	107.57	113.15	118.14	124.12	128.30	137.21
95	113.04	118.75	123.86	129.97	134.25	143.34
100	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17	149.45

آزمون کای دو (استقلال دو پیشامد کیفی)

- برای انجام این آزمون باید مقادیر مشاهده شده و مورد انتظار را در سلول های مورد نظر وارد کنیم. سپس تابع CHISQ.TEST را فراخوانی می کنیم. در فیلد اول آدرس داده های مشاهده شده و در فیلد دوم آدرس داده های مورد انتظار را وارد می کنیم. اکسل فقط سطح معنی داری را محاسبه می کند و آماره آزمون را به دست نمی دهد.
- در این مثال معنی داری خیلی خیلی کوچک می شود یعنی بین سیگار کشیدن و جنسیت رابطه معنی داری وجود دارد.

SUM									
=CHISQ.TEST(									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		observed					expected		
3		145	35	180			94.82927	85.17073	
4		935	935	1870			985.1707	884.8293	
5		1080	970	2050					
6									
7		=CHISQ.TEST(							
8		CHISQ.TEST(actual_range, expected_range)							

آدرس اینترنتی

- <https://www.socscistatistics.com/tests/chisquare/>